Tentamen Complexe Analyse
02/02/09, 14.00–17.00 uur

1. Laat $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ een continu differentieerbare kromme zijn en laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een functie zijn die continu is op de kromme, zodat $|f(\gamma(t))| \leq M$, $t \in [a, b]$. Laat L de lengte van de kromme zijn.
   (a) Definieer de integraal $\int_\gamma f(z)\, dz$ en toon aan
   $$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq ML.$$
   (b) Geef voor $r > 1$ een bovengrens voor
   $$\left| \int_{|z|=r} \frac{1}{z^3 + i}\, dz \right|.$$
2. Definieer de functie $f(z) = (1/z)\, e^{z^3}$, $1 \leq |z| \leq 2$. Toon aan dat de functie $|f(z)|$ een maximum bezit en bepaal dit maximum. Beargumenteer het gevonden resultaat.
3. Bereken met behulp van residuenrekening de integraal
   $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta.$$
   Geef duidelijk aan van welke substituties gebruik gemaakt wordt.
4. Bereken met behulp van residuenrekening de integraal
   $$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx, \quad a > b > 0.$$
   Beargumenteer de keuze van de gebruikte contourintegraal.
5. Definieer de 2π-periodieke reële functie $F(t)$ door
   $$F(t) = 1, \quad -\pi \leq t < 0; \quad F(t) = t/\pi, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$
   (a) Bepaal de bijbehorende complexe Fourier-coefficiënten
   $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int}\, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
   (b) Bepaal voor iedere $t \in [-\pi, \pi]$ de som van de reeks
   $$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$
   Beargumenteer het resultaat.
   (c) Schrijf de complexe Fourierreeks in reële vorm, dus met behulp van sinus en cosinus functies.